

## VIII Всероссийская олимпиада студентов образовательных организаций высшего образования (ВСО) в 2022-2023 году

1. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \left( \frac{17^n + 119^n}{2} \right)^{1/n}$$

2. Найти 6 точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, таких что расстояние между любыми двумя из них является целым числом.

3. Пусть  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  а также  $a, b \in \mathbb{C}/\{0\}$  и  $a \neq b$ . Найдите  $\det(A - B)$ , если известно что

$$\begin{aligned} AB &= aA + bB \\ BA &= bA + aB. \end{aligned}$$

4. Вычислите интеграл

$$\int_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{2z^n + 1} dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Пусть  $x, y$  - натуральные числа,  $\{a_n\}$  - последовательность:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad a_2 = 1 + 2y, \quad a_3 = 1 + 3x + 3y, \\ a_{n+3} &= xa_n + ya_{n+1} + a_{n+2}, \quad \text{для } n \geq 1. \end{aligned}$$

Докажите что для любого  $p$ -простого,  $a_p - 1$  делится на  $p$ .

6. Пусть  $f$  - ограниченная функция, заданная на отрезке  $[0, 2]$  и удовлетворяющая неравенству

$$f(t+h) \geq h(f(t)^2 + f(t)) + 1,$$

для любых  $t, h \geq 0, t+h \leq 2$ . Найдите  $f(t)$ .

7. Докажите, что существует бесконечно много пар  $(m, n)$  натуральных чисел  $m, n$ , таких что

$$\frac{n}{m} + \frac{m+1}{n}$$

является натуральным числом.